1. مجسم العطالة:

لقد وجدنا أن عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ يعطى بالعلاقة:

$$I_\Delta = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta P_{xy} - 2\alpha\gamma P_{xz} - 2\gamma\beta P_{zy} \quad \text{---}(1)$$

إذا جعلنا المحور Δ يدور فإن (α, β, γ) تتغير وبالتالي فإن عزم العطالة I_Δ يتغير، هذا يعني أن عزم العطالة I_Δ تحول تابع لجيوب تمام توجيه المحور Δ. لدراسة هذه التغيرات نأخذ النقطة Q على المحور التي بعدها عن O هو $|\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}$

ويكون $\overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{I_\Delta}}$ حيث $\vec{u}$ متجه وحدة Δ كلما تغير عزم العطالة تغيرت النقطة Q في الفراغ. لنرمز (X, Y, Z) لإحداثيات النقطة Q عندئذ:

$$X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = \frac{1}{\sqrt{I_\Delta}}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \Rightarrow$$

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}}, Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}}, Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}} \Rightarrow \alpha = X\sqrt{I_\Delta}, \beta = Y\sqrt{I_\Delta}, \gamma = Z\sqrt{I_\Delta}$$

نعوض في المعادلة (1) نجد:

$$I_\Delta = (X\sqrt{I_\Delta})^2 I_x + (Y\sqrt{I_\Delta})^2 I_y + (Z\sqrt{I_\Delta})^2 I_z - 2(X\sqrt{I_\Delta})(Y\sqrt{I_\Delta})P_{xy} - 2(X\sqrt{I_\Delta})(Z\sqrt{I_\Delta})P_{xz}$$
$$- 2(Y\sqrt{I_\Delta})(Z\sqrt{I_\Delta})P_{zy}$$
$$X^2 I_x + Y^2 I_y + Z^2 I_z - 2XYP_{xy} - 2XZP_{xz} - 2YZP_{zy} = 1$$

وهي معادلة المحل الهندسي للنقطة Q عندما يتغير Δ في جميع نقاط الفراغ. وهذا المحل هو سطح من الدرجة الثانية، وهو سطح مغلق لأن I_Δ لا ينعدم من أجل جميع نقاط الجسم وبالتالي Q لا تذهب إلى النهاية، لذلك فهو مجسم قطع ناقص ويسمى بمجسم ناقص العطالة.

هناك حالة خاصة يصبح فيها هذا المجسم اسطوانة وذلك لأن عندما يكون الجسم قضيبياً ماراً من مبدأ الإحداثيات. إذاً باستثناء هذه الحالة فإن النقطة Q تتحول على مجسم قطع ناقصي اهليلجي مركزه النقطة O

إن لهذه المجسم مستويات ومحاور تناظر تسمى المستويات التناظرية والمحاور التناظرية للمجسم بالمستويات والمحاور الأساسية للعطالة. بمعنى أنه لو أخذنا جملة محاور جديدة $OX'Y'Z'$ منطبقة على المحاور الأساسية للعطالة عندئذ فإن جداءات العطالة بالنسبة للمحاور الجديدة تصبح معدومة وتسمى عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الجديدة بعزوم العطالة الأساسية (I'_x, I'_y, I'_z) وتصبح معادلة مجسم العطالة بالنسبة للمحاور الجديدة بالشكل:

$$X'^2 I'_x + Y'^2 I'_y + Z'^2 I'_z = 1$$

حيث (X', Y', Z') هي احداثيات Q بالنسبة للمحاور الجديدة.

إذا كانت النقطة O منطبقة على مركز الكتل C للجسم فيسمى مجسم ناقص العطالة بمجسم العطالة المركزي وتسمى المستويات والمحاور التناظرية بالمستويات والمحاور المركزية للعطالة. وتسمى عزوم العطالة بالنسبة للمحاور بعزوم العطالة المركزية.

2. الطريقة العامة لإيجاد عزوم العطالة الأساسية:

لتكن لدينا جملة المحاور $OXYZ$ التي عزوم وجداءات عطالتها بالنسبة لها هي $I_x, I_y, I_z, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$ ولتكن $OX'Y'Z'$ هي جملة محاور أساسية للعطالة (أي منطبقة على المحاور الأساسية للعطالة)، حيث عزوم العطالة بالنسبة لها I'_x, I'_y, I'_z عندئذ يمكننا استنتاج عزوم العطالة الأساسية بالنسبة للجملة $OX'Y'Z'$ بدلالة عزوم وجداءات العطالة بالنسبة للجملة $OXYZ$ كما يلي:

نشكل معين العطالة (مؤثر العطالة) للجملة $OXYZ$ ونطرح λ من عناصر القطر الرئيسي على الترتيب ونساوي هذا المعين بالصفر.

$$\begin{vmatrix} I_x-\lambda & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y-\lambda & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

بحل هذا المعين الذي هو معادلة جبرية من الدرجة الثالثة بالنسبة للمتحول λ نحصل على ثلاث جذور لـ λ هي عبارة عن عزوم العطالة الأساسية $\lambda_1 = I'_x, \lambda_2 = I'_y, \lambda_3 = I'_z$، ولإيجاد جيوب تمام توجيه المحاور الأساسية للعطالة نعوض قيم λ بالمعادلات:

$$(I_x-\lambda)\alpha - P_{xy}\beta - P_{xz}\gamma = 0$$
$$-P_{xy}\alpha + (I_y-\lambda)\beta - P_{yz}\gamma = 0$$
$$-P_{xz}\alpha - P_{yz}\beta + (I_z-\lambda)\gamma = 0$$

حيث نعوض λ بـ λ_1 ثم λ_2 ثم λ_3 على الترتيب ونحلها مع المعادلة $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ لإيجاد (α,β,γ) التي تعين مناحي المحاور الأساسية للعطالة

مثال 15 :

أوجد مجسم العطالة لصفيحة مربعة طولها a ومحصورة بالمحورين الاحداثيين. ثم أوجد عزوم العطالة الأساسية واكتب معادلة مجسم العطالة بالنسبة للمحاور الأساسية للعطالة.

الحل:

إن عزوم عطالة الصفيحة وجداءات عطالة الصفيحة بالنسبة للجملة $OXYZ$

$$I_x = \frac{Ma^2}{3}, I_y = \frac{Ma^2}{3}, I_z = \frac{2Ma^2}{3}, P_{xy} = \frac{Ma^2}{4}, P_{xz} = 0, P_{yz} = 0$$

وبالتالي مجسم العطالة:

$$X^2 I_x + Y^2 I_y + Z^2 I_z - 2XYP_{xy} - 2XZP_{xz} - 2YZP_{zy} = 1$$
$$X^2\frac{Ma^2}{3} + Y^2\frac{Ma^2}{3} + Z^2\frac{2Ma^2}{3} - 2XY\frac{Ma^2}{4} = 1$$

لإيجاد عزوم العطالة الأساسية نكتب المعين:

$$\begin{vmatrix} \frac{Ma^2}{3}-\lambda & -\frac{Ma^2}{4} & 0 \\ -\frac{Ma^2}{4} & \frac{Ma^2}{3}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2Ma^2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{Ma^2}{3}-\lambda\right)\left(\frac{Ma^2}{3}-\lambda\right)\left(\frac{2Ma^2}{3}-\lambda\right) - \frac{M^2a^4}{16}\left(\frac{2Ma^2}{3}-\lambda\right) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{7Ma^2}{12}, \lambda_2 = \frac{Ma^2}{12}, \lambda_3 = \frac{2Ma^2}{3}$$

للمحور أولاً: نعوض $\lambda_1 = \frac{7Ma^2}{12}$ نعوض في المعادلات:

$$\frac{Ma^2}{4}(\alpha-\beta)=0$$
$$\frac{Ma^2}{4}(-\alpha+\beta)=0$$
$$\gamma=0$$
$$\Rightarrow \alpha=\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \Rightarrow 2\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهو منصف الربع الأول للمستوي OXY وهو المحور الأساسي الأول

ثانيا: نعوض $\lambda_2=\frac{Ma^2}{12}$ نعوض في المعادلات:

$$-\frac{Ma^2}{4}(\alpha+\beta)=0$$
$$-\frac{Ma^2}{4}(\alpha+\beta)=0$$
$$\gamma=0$$
$$\Rightarrow \alpha=-\beta$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \Rightarrow 2\alpha^2=1 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{\sqrt{2}},\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهو منصف الربع الثاني للمستوي OXY وهو المحور الأساسي الثاني

ثالثا: نعوض $\lambda_3=\frac{2Ma^2}{3}$ نعوض في المعادلات:

$$4\alpha+3\beta=0$$
$$3\alpha+4\beta=0$$
$$0.\gamma=0$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$
$$\alpha=0,\beta=0,\gamma=1$$

وهو المحور الأساسي الثالث وهو المحور OZ نفسه.

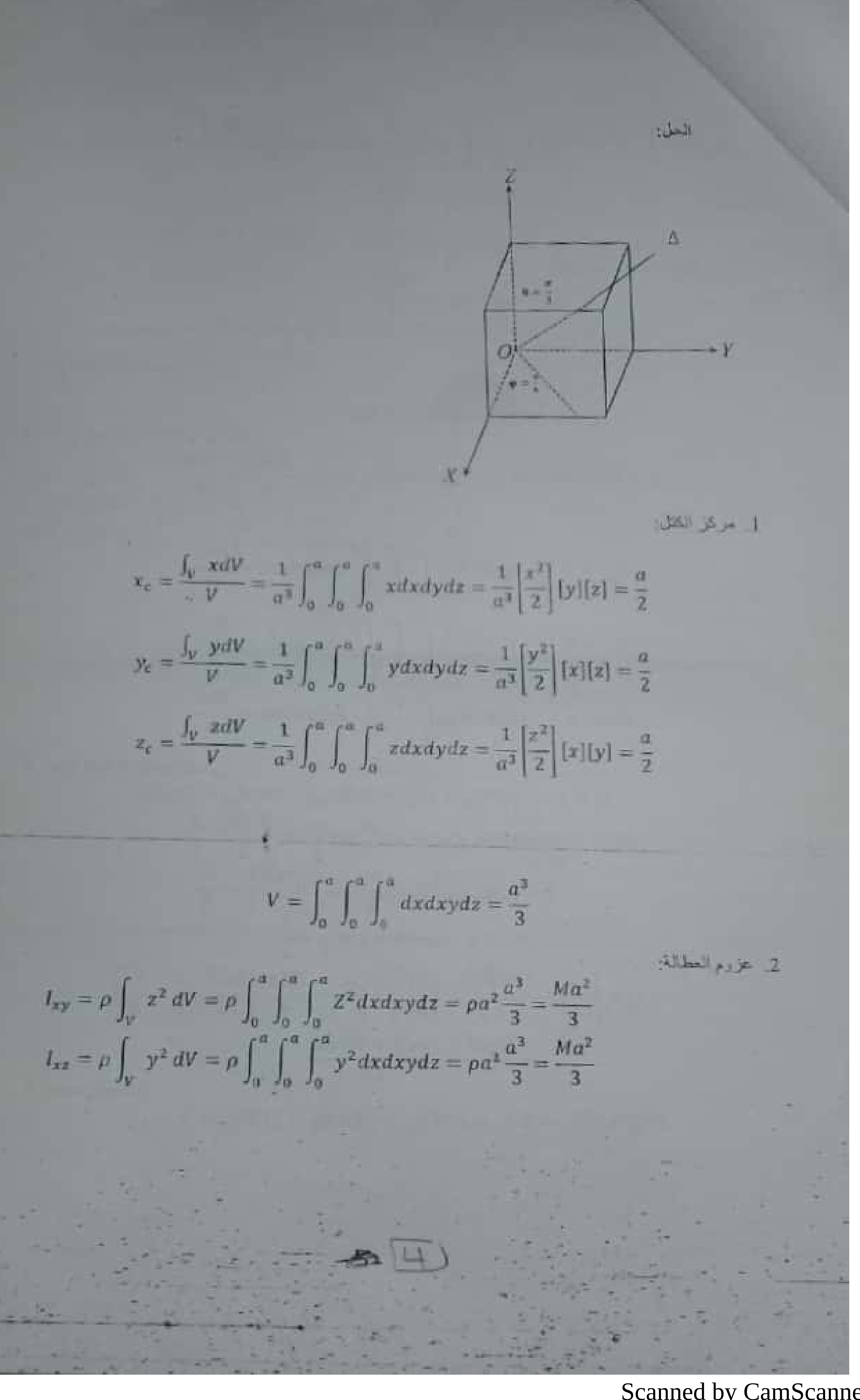
تصبح معادلة مجسم العطالة الأساسي بالنسبة للجملة $OX'Y'Z'$ هو:

$$X'^2 I'_x+Y'^2 I'_y+Z'^2 I'_z=1$$
$$X'^2\frac{Ma^2}{12}+Y'^2\frac{7Ma^2}{12}+Z'^2\frac{2Ma^2}{3}=1$$

مثال 16:

لدينا مكعب متجانس أصم كتلته M وطوله a المطلوب:

1. احداثيات مركز الكتل
2. عزم العطالة بالنسبة لرأسه والمحاور المارة من أضلاعه والمستويات الإحداثية المنطبقة على وجوهه
3. عزم العطالة بالنسبة إلى مركز الكتل.
4. أوجد جداءات العطالة
5. عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ مائل عن المحاور الإحداثية ويشترك معها بالمبدأ ويميل عن OZ بزاوية $\theta=\frac{\pi}{3}$ والزاوية $\varphi=\frac{\pi}{6}$ بين مسقط Δ على المستوي OXY والمحور OX هي
6. أوجد مجسم العطالة للمكعب.



الحل:

1. مركز الكتل:

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{V} = \frac{1}{a^3}\int_0^a \int_0^a \int_0^a x dx dy dz = \frac{1}{a^3}\left[\frac{x^2}{2}\right][y][z] = \frac{a}{2}$$

$$y_c = \frac{\int_V y dV}{V} = \frac{1}{a^3}\int_0^a \int_0^a \int_0^a y dx dy dz = \frac{1}{a^3}\left[\frac{y^2}{2}\right][x][z] = \frac{a}{2}$$

$$z_c = \frac{\int_V z dV}{V} = \frac{1}{a^3}\int_0^a \int_0^a \int_0^a z dx dy dz = \frac{1}{a^3}\left[\frac{z^2}{2}\right][x][y] = \frac{a}{2}$$

$$V = \int_0^a \int_0^a \int_0^a dxdxydz = \frac{a^3}{3}$$

2. عزوم العطالة:

$$I_{xy} = \rho \int_V z^2\, dV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a Z^2 dxdxydz = \rho a^2 \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{xz} = \rho \int_V y^2\, dV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a y^2 dxdxydz = \rho a^2 \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_{zy} = \rho \int_V x^2\, dV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a x^2 dxdxydz = \rho a^2 \frac{a^3}{3} = \frac{Ma^2}{3}$$

$$I_x = I_{xy} + I_{zz} = \frac{2Ma^2}{3}$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz} = \frac{2Ma^2}{3}$$

$$I_z = I_{zy} + I_{xz} = \frac{2Ma^2}{3}$$

وهي عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الإحداثية المارة من أحرف المكعب.

أما عزم العطالة بالنسبة لرأسه:

$$I_0 = I_x + I_y + I_z = Ma^2$$

3. عزم العطالة بالنسبة لمركز كتلته

$$I_o = I_c + Md^2 \Longrightarrow I_c = I_o - Md^2 = Ma^2 - \frac{3Ma^2}{4} = \frac{Ma^2}{4}$$

4. جداءات العطالة

$$P_{xy} = \rho \int_V xydV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a xydxdydz = \frac{Ma^2}{4}$$

$$P_{xz} = \rho \int_V xzdV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a xzdxdydz = \frac{Ma^2}{4}$$

$$P_{zy} = \rho \int_V zydV = \rho \int_0^a \int_0^a \int_0^a zydxdydz = \frac{Ma^2}{4}$$

5. عزم العطالة بالنسبة للمحور:

$$I_\Delta = \alpha^2 I_x + \beta^2 I_y + \gamma^2 I_z - 2\alpha\beta P_{xy} - 2\alpha\gamma P_{xz} - 2\gamma\beta P_{zy}$$

$$\alpha = sin\theta cos\varphi = sin\frac{\pi}{3} cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\beta = sin\theta sin\varphi = sin\frac{\pi}{3} sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\gamma = cos\theta = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$I_\Delta = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\frac{2Ma^2}{3} - \frac{2Ma^2}{4}\left[\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right]$$

$$= \frac{2Ma^2}{3} - \frac{(5\sqrt{3} + 6)Ma^2}{32}$$

6. مجسم العطالة:

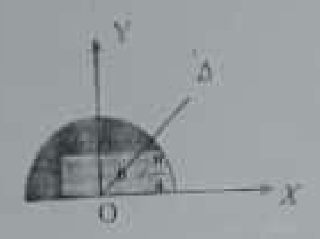
$$X^2 I_x + Y^2 I_y + Z^2 I_z - 2XYP_{xy} - 2XZP_{xz} - 2YZP_{zy} = 1$$

$$\frac{2Ma^2}{3}[X^2+Y^2+Z^2]-2\frac{Ma^2}{4}[XY+XZ+YZ]=1$$

مثال ١٧:

أوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة بشكل نصف دائرة بالنسبة لمحور يمر من مركز الدائرة ويقع في مستويها ويصنع زاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$ مع القطر المحدد للصفيحة.

الحل:



$$I_x=\rho\int y^2ds=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^\pi \sin^2\theta d\theta=\rho\frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{MR^2}{4}$$

$$I_y=\rho\int x^2ds=\rho\int_0^R r^3dr\int_0^\pi \cos^2\theta d\theta=\rho\frac{R^4}{4}\frac{\pi}{2}=\frac{MR^2}{4}$$

$$I_z=I_x+I_y=\frac{MR^2}{4}+\frac{MR^2}{4}=\frac{MR^2}{2}$$

الصفيحة واقعة في المستوي OXY إذاً $P_{xz}=P_{yz}=0$

وبما أن المحور OY محور تناظر للصفيحة أي: $P_{yx}=P_{yv}=0$

$$\alpha=\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\beta=\sin\theta=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$I_\Delta=\alpha^2I_x+\beta^2I_y+\gamma^2I_z-2\alpha\beta P_{xy}-2\alpha\gamma P_{xz}-2\gamma\beta P_{zy}$$

$$I_\Delta=(\frac{1}{\sqrt{2}})^2I_x+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2I_y+0=\frac{MR^2}{4}$$